PART3　共線条件

例題

(1) 空間の 3 点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

(2) 平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M, △BDE の重心を N とするとき，3 点 C, N, M は一直線上にあることを示せ。

Point Pickup

練習

(1)　空間の 3 点 A$(a,\ -1,\ 5)$，B$(4,\ b,\ -7)$，C$(5,\ 5,\ -13)$ が一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ。

第 15 講　PART3 確認問題

1　空間の 3 点 A(1, 3, 0), B(4, 2, 1), C(x, y, 2) が一直線上にあるとき，

$x=$ [ア]，$y=$ [イ]

である。

2　平行六面体 ABCD−EFGH において，辺 AE を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 PC を 2 : 3 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とすると，

$\overrightarrow{AQ}=$ [ウ]，$\overrightarrow{AG}=$ [エ]

であるから，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{[オ]}{[カ]}\overrightarrow{AG}$

よって，3 点 A，Q，G は一直線上にある。

[ウ]，[エ] は次の①～④のうちから選べ。

① $\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$　　② $\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

③ $\dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　　④ $\dfrac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

PART3　共線条件

例題

(1)　空間の 3 点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，3 点 C，N，M は一直線上にあることを示せ。

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

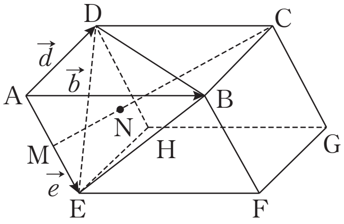
$\overrightarrow{AB}=(2,\ -3,\ -2)$，$\overrightarrow{AC}=(x-3,\ y-2,\ -6)$

よって　$(x-3,\ y-2,\ -6)=k(2,\ -3,\ -2)$ であるから

$x-3=2k$，$y-2=-3k$，$-6=-2k$ ……①

①より　$k=3$　　したがって　$x=9$，$y=-7$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



$\overrightarrow{AN}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}+\dfrac{1}{3}\vec{e}$ より

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)-(\vec{b}+\vec{d})$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}$$
$$=\frac{1}{3}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{e}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}$$
$$=\frac{1}{2}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

よって，$\overrightarrow{CM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CN}$ であるから，3 点 C，N，M は一直線上にある。

練習

(1)　空間の3点 A$(a,\ -1,\ 5)$，B$(4,\ b,\ -7)$，C$(5,\ 5,\ -13)$ が一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とするとき，3点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ。

(1)　3点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

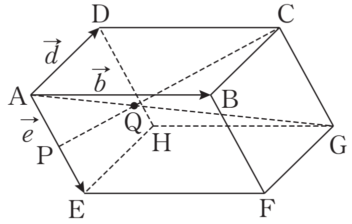
$$\overrightarrow{AB}=(4-a,\ b+1,\ -12),\ \overrightarrow{AC}=(5-a,\ 6,\ -18)$$

よって　$(5-a,\ 6,\ -18)=k(4-a,\ b+1,\ -12)$ であるから

$$5-a=k(4-a),\ 6=k(b+1),\ -18=-12k \cdots\cdots ①$$

①より　$k=\dfrac{3}{2}$　　したがって　$a=2,\ b=3$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{e}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}}{1+2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{e}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$$

よって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ であるから，3点 A，Q，G は一直線上にある。

第15講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：7，イ：1

[解説]

3点A，B，Cが一直線上にあるとき，

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。 [A]

$$\overrightarrow{AC}=(x-1,\ y-3,\ 2)$$

$$\overrightarrow{AB}=(3,\ -1,\ 1)$$

よって，$(x-1,\ y-3,\ 2)=k(3,\ -1,\ 1)$

$$\begin{cases} x-1=3k \\ y-3=-k \\ 2=k \quad \cdots\cdots① \end{cases}$$

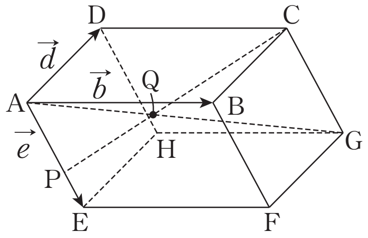
①より　$k=2$

したがって　$\boldsymbol{x=7,\ y=1}$

[A]　3点A，B，Cが一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

2 **[正解]** ウ：④，エ：①，オ：2，カ：5

[解説]



$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{e}$$

点Qは線分PCを2：3に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3\times\overrightarrow{AP}+2\times\overrightarrow{AC}}{2+3}$$ [B]

$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\vec{e}+\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}+\frac{2}{5}\vec{e}$$

$$=\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AG}$ [C]

よって，3点A，Q，Gは一直線上にある。

[B]　2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトルは，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

[C]　3点A，B，Cが一直線上にある
$\iff$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する